第27卷 第2期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 2
2010年04月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0277-06

非线性双曲型积分微分方程的各向异性非协调有限元逼近*

石东洋[1]， 王慧敏[2]

(1- 郑州大学数学系，郑州 450052； 2- 河南工程学院数理系，郑州 450007)

摘 要: 在各向异性网格下，讨论了一类非线性双曲型积分微分方程的一个矩形非协调有限元方法逼近，给出了半离散格式下的有限元解的收敛性分析和误差估计。在精确解适当光滑的前提下，利用新的技巧和精细估计得到了其超逼近性质。同时利用插值后处理技术导出了整体超收敛结果。本文的结论表明传统有限元分析中对网格的正则性要求和对Ritz-Volterra投影的依赖不是必要的，从而进一步扩展了非协调有限元方法的应用范围。

关键词: 双曲型积分微分方程；各向异性；非协调元；半离散；超收敛

分类号: **AMS**(2000) 65N15; 65N30　　**中图分类号:** O241.21　　**文献标识码:** A

1 引言

非线性双曲型方程及非线性双曲型积分微分方程这类问题的研究在核反应动力学、粘弹性力学、生物力学、松散介质中的压力等实际问题的理论和应用方面均有一定的价值。关于这些非线性方程的有限元方法的研究已有许多[1,2]，但大部分要求剖分满足正则性 (即 $\frac{h_K}{\rho_K} \le c$，这里 h_K 为剖分单元 K 的直径，ρ_K 为 K 的最大内切圆直径，c 是一个常数)。但最近的一些研究成果[3]表明，这种假设对一些单元来说是不必要的，对那些定义在窄边区域上的问题如果用正则性剖分，计算量将非常大而无法承受，这时若利用各向异性网格则可以节约大量的自由度而获得同样的收敛效果。另一方面以往对非线性双曲型方程、非线性双曲型积分微分方程及一般的发展型方程的研究几乎都是关于协调有限元，而且 Ritz-Volterra 投影等传统方法是必不可少的，其误差估计也主要集中于收敛性分析。对于非线性双曲型积分微分方程如何进一步提高有限元解的精度，仍是有待解决的问题。

本文把文献[4]中的非协调元应用到非线性双曲型积分微分方程，利用有限元插值性质讨论了半离散格式下非协调有限元解的收敛性。同时利用一些新的技巧和精细估计得到了超逼近性质。最后，通过构造适当的各向异性插值后处理算子，导出了整体超收敛的结果。

2 单元构造

在参考单元 $\hat{K} = [-1,1] \times [-1,1]$ 上构造有限元 $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ 如下

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4, \hat{v}_5\}, \quad \hat{P} = \mathrm{span}\{1, \xi, \eta, \varphi(\xi), \varphi(\eta)\},$$

收稿日期: 2007-06-08. **作者简介:** 石东洋 (1961年11月生)，男，博士，教授. 研究方向：有限元方法.

***基金项目:** 国家自然科学基金 (10671184; 10971203).

其中

$$\hat{v}_i = \frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}\mathrm{d}\hat{s}, \quad i=1,2,3,4, \quad \hat{v}_5 = \frac{1}{|\hat{K}|}\int_{\hat{K}}\hat{v}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1).$$

容易验证，对任意的 $\hat{v}\in H^1(\hat{K})$，其插值函数可表示为

$$\hat{I}\hat{v} = \hat{v}_5 + \frac{1}{2}(\hat{v}_2-\hat{v}_4)\xi + \frac{1}{2}(\hat{v}_3-\hat{v}_1)\eta + \frac{1}{2}(\hat{v}_2+\hat{v}_4-2\hat{v}_5)\varphi(\xi) + \frac{1}{2}(\hat{v}_3+\hat{v}_1-2\hat{v}_5)\varphi(\eta),$$

且具有各向异性特征[5]。

有限元空间 V^h 定义为

$$V^h = \left\{v^h|\hat{v}^h = v^h|_K\circ F_K\in\hat{P}, \forall\, K\in T_h, \int_F[v^h]\mathrm{d}s = 0,\, F\subset\partial K\right\},$$

这里 $[v^h]$ 表示 v^h 跨过单元边界 F 的跳跃度，当 $F\subset\partial\Omega$ 时，$[v^h]=v^h$，$F_K:\hat{K}\to K$ 为参考单元到一般矩形单元的可逆仿射变换。

3 非线性双曲型积分微分方程及其逼近

考虑下面非线性双曲型积分微分方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \nabla\cdot\left\{a(X)\nabla u + \int_0^t b(X,t,\tau,u(X,\tau))\nabla u(X,\tau)\mathrm{d}\tau\right\} + f(u), & (X,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u_t(X,0)=0, \quad u(X,0)=0, \quad X\in\Omega, \quad u(X,t)=0, & (X,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \end{cases} \tag{1}$$

其中 $X=(x,y)$。方程的系数满足下述假定：

(i) 存在正常数 a_0, a_1，使得 $a_0\le a(X)\le a_1$；

(ii) $b(X,t,\tau,u(X,\tau))$, $b_t(X,t,\tau,u(X,\tau))$ 和 $f(u)$ 对变量 u 满足 Lipschitz 连续条件且均为有界函数，并具有本文论证所需的各阶有界偏导数。

对应于 (1) 的变分形式为：求 $u:[0,T]\to H_0^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} (u_{tt},v) + (a(X)\nabla u,\nabla v) + \left(\int_0^t b(u(\tau))\nabla u(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla v\right) = (f(u),v), \quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega), \\ u_t(0)=0, \quad u(0)=0, \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$(u,v) = \int_\Omega uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad b(u(\tau)) = b(X,t,\tau,u(X,\tau)), \quad u_t(0)=u_t(X,0), \quad u(0)=u(X,0).$$

式 (2) 的非协调有限元半离散格式为：求 $u^h:[0,T]\to V^h$，使得

$$\begin{cases} (u_{tt}^h,v) + (a(X)\nabla u^h,\nabla v)_h + \left(\int_0^t b(u^h(\tau))\nabla u^h(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla v\right)_h = (f(u^h),v), \quad \forall\, v\in V^h, \\ u_t^h(0)=0, \quad u^h(0)=0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $(\cdot,\cdot)_h = \sum\limits_K(\cdot,\cdot)_K$。容易证明

$$\|\cdot\|_h = \Big(\sum_K|\cdot|_{1,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

是 V^h 上的模。

4　基本估计式

记 $w = u - I_h u$，其中 I_h 为 V^h 上的插值算子。

引理 1[4]　若

$$b(u) \in L^\infty(W^{1,\infty}), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

或

$$b(u) \in L^\infty(W^{2,\infty}), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega),$$

时，对任意的 $v \in V_h$，则在各向异性网格下分别有

$$\Big|\sum_K \int_{\partial K} b(u)\frac{\partial u}{\partial n} v\mathrm{d}s\Big| \le ch|b(u)|_{L^\infty(W^{1,\infty})}|u|_2\|v\|_h \le ch\|u\|_2\|v\|_h \tag{4}$$

或

$$\Big|\sum_K \int_{\partial K} b(u)\frac{\partial u}{\partial n} v\mathrm{d}s\Big| \le ch^2|b(u)|_{L^\infty(W^{2,\infty})}|u|_3\|v\|_h \le ch^2\|u\|_3\|v\|_h. \tag{5}$$

引理 2[5]　有下面的估计

$$\|w\|_0 + h\|w\|_h \le ch^2|u|_2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

$$(\nabla w, \nabla v)_h = 0, \quad (\nabla w_t, \nabla v)_h = 0, \quad \forall\, v \in V^h.$$

引理 3　设 $a(X), b(u)$ 满足假设条件，对任意的 $v \in V^h$ 有

$$(a(X)\nabla w, \nabla v)_h + (b(u)\nabla w, \nabla v)_h = O(h^2)|u|_2\|v\|_h. \tag{6}$$

证明　令

$$\bar{a} = \frac{1}{|K|}\int_K a(X),$$

则有

$$\begin{aligned}\big(a(X)\nabla w, \nabla v\big)_h &= \sum_K (\bar{a}\nabla w, \nabla v)_K + \sum_K \big((a(X) - \bar{a})\nabla w, \nabla v\big)_K \\ &\le ch\sum_K |w|_{1,K}|v|_{1,K} \le ch^2|u|_2\|v\|_h.\end{aligned} \tag{7}$$

同理可证 $(b(u)\nabla w, \nabla v)_h \le ch^2|u|_2\|v\|_h$。引理得证。

5　收敛性分析

利用上述引理，我们可以得到下面的误差估计。

定理 1　设 u 是 (1) 的解且 $u,\ u_t \in L^\infty(H^2)\bigcap L^\infty(W^{1,\infty}), u_{tt} \in L^2(H^2)$，$u^h \in V^h$ 是半离散问题 (3) 的解，则有

$$\|u - u^h\|_{L^\infty(\|\cdot\|_h)} + \|u_t - u_t^h\|_{L^\infty(L^2)} \le ch\big(\|u\|_{L^\infty(H^2)} + |u_t|_{L^2(H^2)} + |u_{tt}|_{L^2(H^2)}\big). \tag{8}$$

证明 记 $\theta = u^h - I_h u$，其中 $\theta \in V^h$。由 (3) 式和 (1) 式可得误差方程，对任意的 $v \in V^h$ 有

$$
\begin{aligned}
(u^h_{tt} - u_{tt}, v) \;=\; & -\big(a(X)\nabla u^h - a(X)\nabla u, \nabla v\big)_h + \Big(\int_0^t b(u(\tau))\nabla u(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla v\Big)_h \\
& + \big(f(u^h) - f(u), v\big) - \Big(\int_0^t b(u^h(\tau))\nabla u^h(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla v\Big)_h \\
& - \sum_K \int_{\partial K} a(X)\frac{\partial u}{\partial n} v\mathrm{d}s - \sum_K \int_{\partial K} \Big(\int_0^t b(u(\tau))\frac{\partial u(\tau)}{\partial n}\mathrm{d}\tau\Big) v\mathrm{d}s. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

在 (9) 式中取 $v = \theta_t$，两端对 t 从 0 到 t' 积分，由于 $\theta(0) = \theta_t(0) = 0$，则有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\theta_t\|_0^2 + \frac{1}{2}\big(a(X)\nabla\theta, \nabla\theta\big)_h \;=\; & \int_0^{t'} (w_{tt}, \theta_t)\mathrm{d}t + \int_0^{t'} \big(a(X)\nabla w, \nabla\theta_t\big)_h \mathrm{d}t \\
& + \int_0^{t'} \Big(\int_0^t b(u(\tau))\nabla w(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta_t(t)\Big)_h \mathrm{d}t \\
& - \int_0^{t'} \Big(\int_0^t b(u^h(\tau))\nabla\theta(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta_t(t)\Big)_h \mathrm{d}t \\
& + \int_0^{t'} \Big(\int_0^t (b(u(\tau)) - b(u^h(\tau)))\nabla I_h u(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta_t(t)\Big)_h \mathrm{d}t \\
& + \int_0^{t'} \big(f(u^h) - f(u), \theta_t\big)\mathrm{d}t - \int_0^{t'} \Big(\sum_K \int_{\partial K} a(X)\frac{\partial u}{\partial n}\theta_t \mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t \\
& - \int_0^{t'} \sum_K \int_{\partial K} \Big(\int_0^t b(u(\tau))\frac{\partial u(\tau)}{\partial n}\mathrm{d}\tau\Big)\theta_t \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{8} G_i. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

利用 Hölder 不等式，Young 不等式及引理 1 中 (4) 式估计 $G_i (i = 1, 2, \cdots, 8)$

$$
G_1 + G_6 \le ch^4 \int_0^{t'} \big(|u_{tt}|_2^2 + |u|_2^2\big)\mathrm{d}t + c\int_0^{t'} \big(\|\theta_t\|_0^2 + \|\theta\|_h^2\big)\mathrm{d}t;
$$

$$
\begin{aligned}
G_2 + G_3 + G_4 = & \big(a(X)\nabla w, \nabla\theta\big)_h - \int_0^{t'} \big(a(X)\nabla w_t, \nabla\theta\big)_h \mathrm{d}t + \Big(\int_0^t b(u(\tau))\nabla w(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta\Big)_h \\
& - \int_0^{t'} \Big(\int_0^t b_t(u(\tau))\nabla w(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta(t)\Big)_h \mathrm{d}t - \int_0^{t'} \big(b(u)\nabla w, \nabla\theta\big)_h \mathrm{d}t \\
& - \Big(\int_0^t b(u^h(\tau))\nabla\theta(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta\Big)_h + \int_0^{t'} \big(b(u^h)\nabla\theta, \nabla\theta\big)_h \mathrm{d}t \\
& + \int_0^{t'} \Big(\int_0^t b_t(u^h(\tau))\nabla\theta(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta(t)\Big)_h \mathrm{d}t \\
\le\; & \varepsilon\|\theta\|_h^2 + ch^2\Big(|u|_2^2 + \int_0^{t'} \big(|u|_2^2 + |u_t|_2^2\big)\mathrm{d}t\Big) + c\int_0^{t'} \|\theta\|_h^2 \mathrm{d}t; \qquad (11)
\end{aligned}
$$

由于 $\|\theta\|_0^2 \le c\int_0^{t'}(\|\theta\|_0^2+\|\theta_t\|_0^2)\mathrm{d}t$，$\|\theta\|_0 \le \|\theta\|_h$ (见文献 [5])，则有

$$\begin{aligned}
G_5 \;=\; & \Big(\int_0^t \big(b(u(\tau))-b(u^h(\tau))\big)\nabla I_h u(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta\Big)_h - \int_0^{t'} \big((b(u)-b(u^h))\nabla I_h u, \nabla\theta\big)_h \mathrm{d}t \\
& - \int_0^{t'} \Big(\int_0^t \big(b_t(u(\tau))-b_t(u^h(\tau))\big)\nabla I_h u(\tau)\mathrm{d}\tau, \nabla\theta(t)\Big)_h \mathrm{d}t \\
\le\; & \varepsilon\|\theta\|_h^2 + ch^4\int_0^{t'} |u|_2^2\mathrm{d}t + c\int_0^{t'} \|\theta\|_h^2\mathrm{d}t;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
G_7+G_8 \;=\; & -\sum_K\int_{\partial K} a(X)\frac{\partial u}{\partial n}\theta\mathrm{d}s + \int_0^{t'}\Big(\sum_K\int_{\partial K} a(X)\frac{\partial u_t}{\partial n}\theta\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t \\
& -\sum_K\int_{\partial K}\Big(\int_0^t b(u(\tau))\frac{\partial u(\tau)}{\partial n}\mathrm{d}\tau\Big)\theta\mathrm{d}s \\
& +\int_0^{t'}\Big(\sum_K\int_{\partial K}\Big(\int_0^t b_t(u(\tau))\frac{\partial u(\tau)}{\partial n}\mathrm{d}\tau\Big)\theta(t)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t + \int_0^{t'}\Big(\sum_K\int_{\partial K} b(u)\frac{\partial u}{\partial n}\theta\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t \\
\le\; & \varepsilon\|\theta\|_h^2 + ch^2\Big(\|u\|_2^2 + \int_0^{t'} |u_t|_2^2\mathrm{d}t\Big) + c\int_0^{t'} \|\theta\|_h^2\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{13}$$

由于 $(a(X)\nabla\theta,\nabla\theta)_h \ge a_0\|\theta\|_h^2$，结合上述各估计式，取适当小的 ε，整理得

$$\|\theta_t\|_0^2+\|\theta\|_h^2 \le ch^2\Big(\int_0^{t'}(|u_t|_2^2+|u_{tt}|_2^2)\mathrm{d}t+\|u\|_2^2\Big)+c\int_0^{t'}(\|\theta_t\|_0^2+\|\theta\|_h^2)\mathrm{d}t,$$

利用 Gronwall 不等式，则有

$$\|\theta_t\|_0+\|\theta\|_h \le ch\Big(\|u\|_2+\Big(\int_0^{t'}(|u_t|_2^2+|u_{tt}|_2^2)\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

有引理 2 及上式，并利用三角不等式，定理得证。

通过进一步分析，我们还可以得到下面的超逼近和整体超收敛结果。

定理 2　设 u 是 (1) 的解且 $u\in L^\infty(H^3)$，$u_t\in L^2(H^3)\bigcap L^\infty(W^{2,\infty})$，$u_{tt}\in L^2(H^2)$，$u^h\in V^h$ 是半离散问题 (3) 的解，则有

$$\|u^h-I_hu\|_{L^\infty(\|\cdot\|_h)} \le ch^2(\|u\|_{L^\infty(H^3)}+|u_t|_{L^2(H^3)}+|u_{tt}|_{L^2(H^2)}), \tag{14}$$

$$\|I_{2h}u^h-u\|_{L^\infty(\|\cdot\|_h)} \le ch^2(\|u\|_{L^\infty(H^3)}+|u_t|_{L^2(H^3)}+|u_{tt}|_{L^2(H^2)}), \tag{15}$$

其中 I_hu 为 u 的有限元插值，I_{2h} 为利用文献 [6] 中的思想构造的插值后处理算子。

证明　采用定理 1 的证明方法，把定理 1 中的 G_2, G_3 利用引理 3，G_7, G_8 利用引理 1 中的 (5) 式，则 (14) 式得证。利用文献 [6] 中的思想，类似于文献 [5]，构造插值后处理算子 I_{2h}，则 (15) 式得证。从而定理得证。

参考文献：

[1] 袁益让. 一类非线性双曲型方程有限元方法的稳定性和收敛性[J]. 计算数学，1983, 5(2): 149-161
Yuan Y R. The stability and convergence of finite element method for a class of nonlinear hyperbolic equations[J]. Acta Numer Math, 1983, 5(2): 149-161

[2] 孙澎涛. 非线性双曲积分微分方程有限元方法的收敛性分析[J]. 工程数学学报，1994, 11(2): 76-82
Sun P T. Convergence analysis of the finite element method for nonlinear hyperbolic integro-differential equation[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1994, 11(2): 76-82

[3] Apel T, Lue G. Anisotropic mesh refinement in stabilized Galerkin methods[J]. Numer Math, 1996, 74(3): 261-282

[4] Shi D Y, Mao S P, Chen S C. An anisotropic nonconforming finite element with some superconvergence results[J]. J Comput Math, 2005, 23(3): 261-274

[5] 石东洋，谢萍丽，陈绍春. 双曲积分微分方程的各向异性非协调有限元逼近[J]. 应用数学学报，2007, 30(4): 654-666
Shi D Y, Xie P L, Chen S C. Anisotropic nonconforming finite element approximation to hyperbolic integro-differential equation[J]. Acta Appl Math Sinica, 2007, 30(4): 654-666

[6] 林群，严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定：河北大学出版社，1996
Lin Q, Yan N N. Construction and Analysis for Effective Finite Element Methods[M]. Baoding: Hebei University Press, 1996

[7] Chen S C, Shi D Y, Zhao Y C. Anisotropic interpolation and quasi-Wilson element for narrow quadrilateral meshes[J]. IMA J Numer Anal, 2004, 24: 77-95

The Nonconforming Finite Element Approximation to the Nonlinear Hyperbolic Integro-differential Equation on Anisotropic Meshes

SHI Dong-yang[1], WANG *Hui-min*[2]

(1- Deparment of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052;
2- Department of Mathematics and Physics, Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 450007)

Abstract: The approximation of a rectangular nonconforming finite element method for a kind of nonlinear hyperbolic integro-differential equations is discussed under the anisotropic meshes, the convergence analysis and the error estimate of finite element solution are presented for the semi-discrete scheme. The superclose property is derived through the new technique and sharp estimates when the exact solution is appropriately smooth. At the same time, based on the interpolated postprocessing trick, the global superconvergence is obtained. The results of this paper show that the regular condition on the meshes and the dependence on the Ritz-Volterra projection in traditional finite element analysis are not necessary, and thus extend the applications of nonconforming finite element methods.

Keywords: hyperbolic integro-differential equation; anisotropic meshes; nonconforming finite element; semi-discrete; superconvergence

Received: 08 June 2007. **Accepted:** 01 Apr 2008.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10671184; 10971203).